

1.5 Exemples fondamentaux d'applications différentiables

1.5.1 DÉFINITION (APPLICATIONS MULTILINÉAIRES)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient $E_1 \cdots E_k$ et F des espaces vectoriels.

Une application $L : E_1 \times \cdots \times E_k \rightarrow F$ est une application k -linéaire si pour tout $(a_1, \dots, a_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$ et $i \in \{1, \dots, k\}$ l'application partielle $E_i \rightarrow F$ définie par $x_i \mapsto L(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_k)$ est linéaire.

1.5.2 LEMME

Soit $(E_i, \|\cdot\|_{E_i})$, $1 \leq i \leq k$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés.

On munit le produit $E = E_1 \times \cdots \times E_k$ de la norme $\|(x_1, \dots, x_k)\| = \sup\{\|x_1\|_{E_1}, \dots, \|x_k\|_{E_k}\}$.

Soit $L : E_1 \times \cdots \times E_k \rightarrow F$ est une application k -linéaire.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. L est continue en tout point.
2. L est continue en $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_k})$.
3. il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$,

$$\|L(x_1, \dots, x_k)\|_F \leq C \|x_1\|_{E_1} \cdots \|x_k\|_{E_k}.$$

Démonstration: a) 1. \Rightarrow 2. évident.

b) 2. \Rightarrow 3. On sait que $L(0_E) = 0_F$. Par la continuité en 0_E , il existe $\delta > 0$ tel que $\|(x_1, \dots, x_k)\| < \delta$ entraîne que $\|L(x_1, \dots, x_k)\|_F \leq 1$.

Soit $(x_1, \dots, x_k) \in E$, tel que ses coordonnées $x_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.

Alors $\left\|L\left(\delta \frac{x_1}{\|x_1\|_{E_1}}, \dots, \delta \frac{x_k}{\|x_k\|_{E_k}}\right)\right\| \leq 1$. Ainsi, en utilisant la multilinéarité, on obtient

$\|L(x_1, \dots, x_k)\|_F \leq C \|x_1\|_{E_1} \cdots \|x_k\|_{E_k}$ avec $C = \frac{1}{\delta}$. Cette inégalité est valable aussi si l'une des coordonnées est nulle, puisque dans ce cas L s'annule.

c) 3. \Rightarrow 1. On va démontrer cette implication, dans le bilinéaire i.e. $k = 2$. Le cas général ce démontre de la même manière.

Soit $a = (a_1, a_2) \in E$.

Pour tout $x = (x_1, x_2) \in E$, $L(x_1, x_2) - L(a_1, a_2) = L(x_1 - a_1, x_2) + L(a_1, x_2 - a_2)$, par conséquent

$$\begin{aligned} \|L(x) - L(a)\|_F &= \|L(x_1, x_2) - L(a_1, a_2)\|_F \leq \|L(x_1 - a_1, x_2)\|_F + \|L(a_1, x_2 - a_2)\|_F \\ &\leq C \|x_1 - a_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2} + C \|a_1\|_{E_1} \|x_2 - a_2\|_{E_2}. \end{aligned}$$

D'où, lorsque x tends vers a , $\|x_1 - a_1\|_{E_1}$ et $\|x_2 - a_2\|_{E_2}$ tendent vers 0, par suite $\|L(x) - L(a)\|_F$ tend vers 0, ce qui établit la continuité de L en a . ■

1.5.4 PROPOSITION

Soit $L : \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k} \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application k -linéaire.

Alors il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k}$ on ait $\|L(x_1, \dots, x_k)\|_F \leq C \|x_1\|_{E_1} \cdots \|x_k\|_{E_k}$.

Démonstration: On va démontrer le lemme lorsque $k = 2$, i.e. le cas des applications bilinéaires. Le cas général se démontre de la même manière. Soit (e_1, \dots, e_{n_1}) une base de \mathbb{R}^{n_1} et (f_1, \dots, f_{n_2}) une base de \mathbb{R}^{n_2} . Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n_1} x_i e_i \in \mathbb{R}^{n_1}$ et $y = \sum_{j=1}^{n_2} y_j f_j \in \mathbb{R}^{n_2}$ on a

$$L(x, y) = L\left(\sum_{i=1}^{n_1} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n_2} y_j f_j\right) = \sum_{i=1}^{n_1} x_i L(e_i, \sum_{j=1}^{n_2} y_j f_j) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} x_i y_j L(e_i, f_j)$$

D'où

$$\|L(x, y)\| \leq \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} |x_i| |y_j| \|L(e_i, f_j)\| \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty \left(\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \|L(e_i, f_j)\| \right).$$

Ainsi on a l'inégalité avec $C = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \|L(e_i, f_j)\|$. ■

1.5.6 COROLLAIRE

En dimension finie, les applications multilinéaires sont continues.

1.5.7 PROPOSITION

- 1) Toute application constante est différentiable et de différentielle nulle en tout point.
- 2) Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Alors toute application linéaire continue $L : E \rightarrow F$ est différentiable en tout point $a \in E$ et sa différentielle en chaque point est égale à l'application linéaire L .
- 3) Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Alors toute application affine continue $A : E \rightarrow F$ définie par $Ax = b + Lx$ où $b \in F$ et $L \in \mathcal{L}(E, F)$, est différentiable en tout point $a \in E$ et sa différentielle en chaque point est égale à l'application linéaire L .
- 4) Soient E_1, E_2 et F deux espaces vectoriels normés. Alors toute application bilinéaire continue $B : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ est différentiable en tout point $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$ et sa différentielle est l'application linéaire $E_1 \times E_2 \rightarrow F$ définie par $(h, k) \mapsto B(a_1, k) + B(h, a_2)$.
- 5) Plus généralement : Application multilinéaire continues.
Toute application multilinéaire continue $L : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow F$ est différentiable en tout point et sa différentielle au point $(a_1, \dots, a_k) \in E_1 \times \dots \times E_k$ est l'application linéaire de $E_1 \times \dots \times E_k$ dans F :

$$(h_1, \dots, h_k) \mapsto L(h_1, a_2, \dots, a_k) + L(a_1, h_2, a_3, \dots, a_k) + \dots + L(a_1, \dots, a_{k-1}, h_k).$$

Démonstration: 1) c'est clair.

2) Soit $a \in E$. On écrit pour tout $h \in E$

$$L(a+h) - L(a) = L(h) \implies \frac{\|L(a+h) - L(a) - L.h\|}{\|h\|} = \frac{0}{\|h\|} = 0$$

Ainsi, par unicité de la différentielle, $DL(a) = L$.

- 3) Même démonstration que 2)
 4) Soit $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$. Pour $(h, k) \in E_1 \times E_2$ On écrit, en utilisant la bilinéarité,

$$\begin{aligned} B(a_1 + h, a_2 + k) - B(a_1, a_2) &= (B(a_1, a_2) + B(a_1, k) + B(h, a_2) + B(h, k)) - B(a_1, a_2) \\ &= B(a_1, k) + B(h, a_2) + B(h, k). \end{aligned}$$

Comme B est continue d'après le lemme 1.5.2 $\|B(h, k)\|_F \leq C\|h\|_{E_1}\|k\|_{E_2} \leq C\|(h, k)\|^2$; on peut donc prendre dans ce cas $\varepsilon((h, k)) = \frac{B(h, k)}{\|(h, k)\|}$ pour obtenir

$$B(a_1 + h, a_2 + k) - B(a_1, a_2) = B(a_1, k) + B(h, a_2) + \|(h, k)\| \cdot \varepsilon((h, k))$$

avec $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \|\varepsilon((h, k))\| \leq \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} C\|(h, k)\| = 0$.

On a ainsi B différentiable et $DB(a_1, a_2)(h, k) = B(a_1, k) + B(h, a_2)$.

- 5) Se traite, de la même façon, en utilisant le lemme 1.5.2 ■

1.5.9 COROLLAIRE

En dimension finie, les applications multilinéaires sont différentiables.

1.5.10 EXEMPLE. 1. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, l'application

$P_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$ est linéaire, donc différentiable.

2. Le produit de deux nombre réels, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow xy$ est une application bilinéaire (2-linéaire)
 3. L'application $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $L((x, y), z) = (2xz - yz, 0, xz)$ est bilinéaire.
 4. L'application \det qui associe à une matrice carrée d'ordre n son déterminant est une application n -linéaire des vecteurs colonnes de la matrice, on identifie dans ce cas l'espace des matrices carrées d'ordre n , $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec le produit de n copies de \mathbb{R}^n , à savoir $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$. On en déduit que la différentielle de \det en une matrice $A = (c_1, \dots, c_n)$ est égale à

$$D(\det)(A).H = \det(h_1, c_2, \dots, c_n) + \det(c_1, h_2, \dots, c_n) + \dots + \det(c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, h_n)$$

où $H = (h_1, \dots, h_n) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est arbitraire.

En particulier, si $A = I$ est la matrice identité, alors $D(\det)(I).H = \text{tr}(H)$ où

$$\text{tr}(H) = \sum_{i=1}^n h_{ii} \text{ est la trace de la matrice } H = [h_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Pour une matrice $A = [h_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$, on note $\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ le cofacteur correspondant à a_{ij} et $\text{com}(A)$ la matrice des cofacteurs.

Alors en développant le déterminant selon la i ème ligne, on a $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{A}_{ij}$.

Soit E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nulles sauf celui qui se trouve à l'intersection de la i ème ligne et la j ème colonne qui vaut 1. La famille $\{E_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour une matrice $A = [h_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$, on note $\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ le cofacteur correspondant à a_{ij} . Alors en développant le déterminant selon la i eme ligne, on a $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{A}_{ij}$.

Alors, la (i, j) dérivée partielle est donnée par

$$D_{(i,j)}(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(A + tE_{ij}) - \det(A)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n a_{ik} \tilde{A}_{ik} + t \tilde{A}_{ij} - \sum_{k=1}^n a_{ik} \tilde{A}_{ik}}{t} = \tilde{A}_{ij}.$$

Ainsi, pour toute matrice $H = [h_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$, on aura

$$D(\det)(A).H = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} h_{ij} D_{(i,j)}(A) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} h_{ij} \tilde{A}_{ij} = \text{tr}({}^t \text{com}(A).H)$$

D'autre part, on a la formule ${}^t \text{com}(A).A = A.{}^t \text{com}(A) = \det(A).I$

En effet, le i coefficient de la diagonale de ${}^t \text{com}(A).A$ est égale à $\sum_{k=1}^n a_{ik} \tilde{A}_{ik}$, donc à $\det(A)$ et pour $i \neq j$ on a le coefficient est égale à $\sum_{k=1}^n a_{jk} \tilde{A}_{ik}$ est donc égale au déterminant de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la i eme ligne par la j eme ligne, vaut donc 0, puisqu'il y a deux ligne identique.

Maintenant, si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, ${}^t \text{com}(A) = \det(A).A^{-1}$ et par suite pour toute matrice $H = [h_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$, la formule s'écrit $D(\det)(A).H = \det(A).tr(A^{-1}.H)$.

1.6 Opérations sur les différentielles

1.6.1 THÉORÈME (LE THÉORÈME DES APPLICATIONS COMPOSÉES)

Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés.

Soient $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts. Soient $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow G$ deux applications telle que $f(U) \subset V$.

Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Démonstration: Par hypothèse on a : $\forall h \in E$, tel que $a + h \in U$,

$$f(a + h) = f(a) + Df(a)h + \|h\|_{\varepsilon_1}(h) \text{ avec } \varepsilon_1(h) \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0$$

et $\forall k \in F$, tel que $f(a) + k \in V$,

$$g(f(a) + k) = g(f(a)) + Dg(f(a))k + \|k\|_{\varepsilon_2}(k) \text{ avec } \varepsilon_2(k) \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow 0$$

En posant $k = Df(a)h + \|h\|_{\varepsilon_1}(h)$, on aura $f(a + h) = f(a) + k$ et

$$g(f(a + h)) = g(f(a)) + Dg(f(a)) (Df(a)h + \|h\|_{\varepsilon_1}(h)) + \|k\|_{\varepsilon_2}(k)$$

$$= g(f(a)) + Dg(f(a)) \circ Df(a)h + (\|h\|Dg(f(a))\varepsilon_1(h) + \|k\|\varepsilon_2(k))$$

On pose

$$\varepsilon(h) = \begin{cases} Dg(f(a))\varepsilon_1(h) + \frac{\|k\|}{\|h\|}\varepsilon_2(k) & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

Il nous reste à montrer que $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

$k = Df(a)h + \|h\|\varepsilon_1(h)$, d'où $k \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$ et

$\|k\| \leq \|h\| (\|Df(a)\| + \|\varepsilon_1(h)\|)$, par suite

$\|\varepsilon(h)\| \leq \|Dg(f(a))\| \cdot \|\varepsilon_1(h)\| + (\|Df(a)\| + \|\varepsilon_1(h)\|) \cdot \|\varepsilon_2(k)\|$ ceci prouve le théorème.

Application au calcul des dérivées partielles sur un evn de dimension finie :

Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application différentiable en $a \in E$.

Soit l'isomorphisme isométrique (canonique) Φ de \mathbb{R}^n sur E (voir 1.0.34), défini par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \Phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

On remarquera que $\Phi^{-1}(e_j)$ est le j -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n .

On pose $g = f \circ \Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $b = \Phi^{-1}(a)$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_j}(b) &= D_{\Phi^{-1}(e_j)}g(b) = Df \circ \Phi(b)(\Phi^{-1}(e_j)) = Df(\Phi(b)) \circ D\Phi(b)(\Phi^{-1}(e_j)) \\ &= f(\Phi(b)) \circ \Phi(\Phi^{-1}(e_j)) = Df(a)(e_j) = D_{e_j}f(a). \end{aligned}$$

Ce n'est autre que la j -ième dérivée partielle de f en a . Donc, les dérivées partielles de f en a sont égales aux dérivées partielles de g en b , par suite $J_f(a) = J_g(b)$. Ainsi le calcul des matrices jacobiniennes, en dimension finie, se ramène au calcul d'une jacobienne dans \mathbb{R}^n .

1.6.3 EXEMPLE. Soit $E = \mathbb{R}_3[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$, l'espace vectoriel des polynômes de degrés ≤ 3 à coefficients réels. E est un espace vectoriel de dimension 4, on le munit de la base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) = e^{a_0} + \cos(a_1) + \cos(a_2) + a_2^2 \sin(a_3)$. (on remarquera que f est différentiable puisqu'elle s'exprime comme composée et somme de fonctions différentiables.)

On se propose de déterminer les dérivées partielles de f au point $P_0 = 1 + 2X^2 + X^3$. Avec les notations précédentes, on a $g = f \circ \Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ est l'application définie par $f(a_0, a_1, a_2, a_3) = e^{a_0} + \cos(a_1) + \cos(a_2) + a_2^2 \sin(a_3)$ et $b = \Phi^{-1}(P_0) = (1, 0, 2, 1)$.

D'où $\frac{\partial g}{\partial a_0}(b) = e^{a_0}|_{(1,0,2,1)} = e$, $\frac{\partial g}{\partial a_1}(b) = -\sin(a_1)|_{(1,0,2,1)} = 0$,

$\frac{\partial g}{\partial a_2}(b) = -\sin(a_2) + 2a_2 \cos(a_3)|_{(1,0,2,1)} = -\sin(2) + 4 \cos(1)$ et

$\frac{\partial g}{\partial a_3}(b) = -a_2^2 \sin(a_3)|_{(1,0,2,1)} = -4 \sin(1)$.

Ainsi, $J_f(P_0) = J_g(1, 0, 2, 1) = (e, 0, -\sin(2) + 4 \cos(1), -4 \sin(1))$.

1.6.4 PROPOSITION (COMBINAISON LINÉAIRE)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés.

$a \in U \subset E$ un ouvert.

Soient f et g deux applications définies dans U à valeurs dans F et λ et μ deux scalaires.

Si f et g sont différentiables en a , il en est de même de $\lambda f + \mu g$ et

$$D(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda Df(a) + \mu Dg(a).$$

Démonstration: Par hypothèse on a : $\forall h \in E$, tel que $a + h \in U$,

$$f(a + h) = f(a) + Df(a)h + \|h\|\varepsilon_1(h) \text{ avec } \varepsilon_1(h) \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0$$

$$g(a + h) = g(a) + Dg(a)h + \|h\|\varepsilon_2(h) \text{ avec } \varepsilon_2(h) \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0$$

Alors

$$(\lambda f + \mu g)(a + h) = (\lambda f(a) + \mu g(a)) + (\lambda Df(a) + \mu Dg(a))h + \|h\|(\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h)).$$

En posant $\varepsilon(h) = \varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h)$, on voit que $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

1.6.6 PROPOSITION (COMPOSITION AVEC UNE TRANSLATION)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $a \in E$. Soit $f : V \rightarrow F$ une application d'un voisinage V de a dans E , à valeurs dans F . Soit $x_0 \in E$ et f_0 l'application de $x_0 + V$ à valeurs dans F telle que

$$\forall x \in x_0 + V, \quad f_0(x) = f(x - x_0)$$

Alors si f est différentiable en a , f_0 est différentiable en $x_0 + a$ et

$$Df_0(a + x_0) = Df(a)$$

Démonstration: Si f est différentiable en a , on écrit

$$f_0(a + x_0 + h) - f_0(a + x_0) = f(a + h) - f(a) = Df(a)h + \|h\|\varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

D'où la différentiabilité de f_0 en $a + x_0$ et l'égalité $Df(a) = Df_0(a + x_0)$. ■

1.6.8 PROPOSITION (COMPOSITION AVEC UNE APPLICATION LINÉAIRE)

Soient E , F et G trois espaces vectoriels normés et $a \in E$. Soit $f : V \rightarrow F$ une application d'un voisinage V de a à valeurs dans F , différentiable en a .

1) Si $u \in \mathcal{L}(F, G)$, $u \circ f$ est différentiable en a et

$$D(u \circ f)(a) = u \circ Df(a)$$

2) Si $v \in \mathcal{L}(G, E)$ et si $v(b) = a$, alors $f \circ v$ est dérivable en b et

$$D(f \circ v)(b) = Df(a) \circ v$$

Démonstration: 1) La relation

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)h = \|h\|\varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ entraîne :

$$u \circ f(a+h) - u \circ f(a) - u \circ Df(a)h = \|h\|\varepsilon_1(h)$$

où $\varepsilon_1(h) = u \circ \varepsilon(h)$ et donc $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = 0$.

2) On a $f \circ v(b+k) = f(a+v(k)) = f(a) + Df(a)v(k) + \|v(k)\|\varepsilon(v(k))$

$$= f \circ v(b) + Df(a) \circ v(k) + \|k\|\varepsilon_2(k)$$

avec $\|\varepsilon_2(k)\| \leq \|\varepsilon(v(k))\| \|v\|$ et donc $\lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon_2(k) = 0$. ■

1.6.10 COROLLAIRE

Soit V un voisinage de a dans E et $f : V \rightarrow F$ une application. Si f est différentiable en a , alors pour toute forme linéaire continue $\phi \in F' = \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$, l'application $x \mapsto f_\phi(x) = \phi \circ f(x)$ de E dans \mathbb{R} est différentiable en a et

$$\forall h \in E, \quad Df_\phi(a)h = \phi \circ Df(a)h.$$

1.6.11 COROLLAIRE (APPLICATIONS DANS UN PRODUIT)

Soient E, F_1, \dots, F_p des espaces vectoriels normés.

Soient $U \subset E$ un ouvert et $f = (f_1, \dots, f_p) : U \rightarrow F_1 \times F_2, \dots \times F_p$ une application.

Alors, f est différentiable en $a \in U$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, chaque composante $f_i : U \rightarrow F_i$ est différentiable en a .

Démonstration: On suppose f différentiable en a . Si on note par π_i la projection de F sur F_j définie par $\pi_i(y_1, \dots, y_p) = y_i$,

Alors π_i est linéaire continue et d'après 1.6.8, $f_i = \pi_i \circ f$ est différentiable en a .

Réciproquement, on suppose que pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, chaque composante $f_j : U \rightarrow F_j$ est différentiable en a .

Soit $\mu_j : F_j \rightarrow F$ l'application définie par $\mu_j(y_j) = (0, \dots, 0, y_j, 0, \dots, 0)$. Comme μ_j est linéaire continue et $f = \sum_{j=1}^n \mu_j \circ f_j$; f est donc différentiable en a comme somme finie de fonctions différentiables en a . ■

1.6.13 REMARQUE. On obtient aussi les relations

1. $Df_j(a) = \pi_j \circ Df(a)$

$$2. Df(a) = \sum_{j=1}^n \mu_j \circ Df_j(a)$$

$$3. \text{ Pour tout } h \in \mathbb{R}^n, Df(a)h = \begin{pmatrix} Df_1(a)h \\ \vdots \\ Df_p(a)h \end{pmatrix}.$$

1.6.14 COROLLAIRE

- 1) Soient $E, F,$ et G des espaces vectoriels normés. Soient U un ouvert de $E,$ $f_1 : U \rightarrow F$ et $f_2 : U \rightarrow F$ deux applications différentiables au point $a \in U.$ Alors pour toute application bilinéaire continue $\phi : F \times F \rightarrow G,$ l'application $E \rightarrow G, x \mapsto \phi(f_1(x), f_2(x))$ est différentiable en a et pour tout $h \in E$

$$D\phi(f_1, f_2)(a)h = \phi(Df_1(a)h, f_2(a)) + \phi(f_1(a), Df_2(a)h).$$

- 2) **Différentielle d'un produit :** Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ des applications différentiables au point $a \in U.$ Alors l'application $fg : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable en a et

$$D(fg)(a) = g(a).Df(a) + f(a).Dg(a).$$

- 3) **Différentielle d'un quotient :** Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable au point $a \in U.$ Si $f(a) \neq 0,$ alors l'application $\frac{1}{f}$ est définie dans un voisinage de a et est différentiable en $a :$

$$D\left(\frac{1}{f}\right)(a) = -\frac{1}{(f(a))^2}Df(a).$$

Démonstration: 1) Si on pose $f = (f_1, f_2)$ alors $\phi(f_1, f_2) = \phi \circ f$ on obtient le résultat en utilisant 1.6.1.

- 3) On définit $g : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(y) = \frac{1}{y},$ alors si $b \neq 0,$ on a $Dg(b)k = -\frac{1}{b^2}k$ pour tout $k \in \mathbb{R}.$ On applique alors 1.6.1 à $g \circ f.$ ■

1.6.16 **EXEMPLE.** 1) Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux applications différentiables au point $a \in U$ alors l'application produit $x \mapsto (fg)(x) := f(x)g(x)$ est une application différentiable en a et

$$D(fg)(a)h = g(a).Df(a)h + f(a).Dg(a)h.$$

On applique 1) à la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto XY.$

1.6.17 DÉFINITION (APPLICATIONS POLYNOMIALES)

- i) Une application polynomiale de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} est une application de la forme

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est un *multi-indice* et $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ est sa longueur.

On écrit aussi parfois x^α pour $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ ce qui permet d'écrire $\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha$ au lieu de $\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

- ii) Une application polynomiale de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^m est une application dont les composantes sont des applications polynomiales de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} .
-

1.6.18 EXEMPLE. 1. L'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, définie par $f(x, y, z) = (2x^2 + xy, xy^2 + z + 5)$ est polynomiale.

2. L'application $\det : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe à une matrice carrée d'ordre p son déterminant est une application polynomiale.
3. Toute application multilinéaire est polynomiale.

1.6.19 COROLLAIRE

Tout application polynomiale de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^m est différentiable en tout point de \mathbb{R}^n .

1.6.20 DÉFINITION

Une application rationnelle (ou fraction rationnelle) d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^p est une application dont toute composante est de la forme $\frac{P_i}{Q_i}$, où P_i et Q_i sont des fonctions polynomiales et Q_i ne s'annule pas dans U , $1 \leq i \leq p$.

1.6.21 COROLLAIRE

Tout application quotient $\frac{P}{Q}$ de deux fonctions polynomiales de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} est une fonction différentiable en tout point de $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) \neq 0\}$.

1.6.22 EXEMPLE. 1. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2+1}$ est différentiable sur \mathbb{R}^2 . En effet, les fonctions xy et $x^2 + y^2 + 1$ sont polynomiales et le dénominateur $x^2 + y^2 + 1 \geq 1$, ne s'annule donc pas sur \mathbb{R}^2 , ainsi, $f(x, y)$ est le quotient de deux applications polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas, par suite, elle est différentiable sur \mathbb{R}^2 .

2. L'application $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, car c'est le quotient de deux polynômes dont le numérateur $x^2 + y^2$ ne s'annule qu'en $\{(0, 0)\}$.
D'autre part, on a vu que f n'était pas différentiable en $\{(0, 0)\}$, ainsi f n'est différentiable que sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

1.6.23 Exercice On considère \mathbb{R}^n muni d'une structure euclidienne, i.e. muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norme euclidienne induite est alors $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Alors, l'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \|x\|$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$Df(x)h = \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|},$$

en d'autres termes les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{x_j}{\|x\|}.$$

Solution : En effet, la différentielle de la forme bilinéaire symétrique $x \mapsto \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ au point x est l'application linéaire $h \mapsto 2 \langle x, h \rangle$. D'autre part, d'après la règle de la différentielle de la composée ou du produit, on a $x \mapsto f^2(x) = \|x\|^2$ est l'application $x \mapsto 2f(x)Df(x)h = 2\|x\|Df(x)h$.
Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, on a $2 \langle x, h \rangle = 2\|x\|Df(x)h$, c-à-d

$$Df(x)h = \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|}.$$

d'où, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = D_{e_j}f(x) = \frac{\langle x, e_j \rangle}{\|x\|} = \frac{x_j}{\|x\|}$.

Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application $\|\cdot\|^\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^\alpha$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$D\|\cdot\|^\alpha(x)h = \alpha\|x\|^{\alpha-2} \langle x, h \rangle.$$

1.7 Représentation matricielle de la différentielle : matrice Jacobienne

Rappel d'algèbre linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectivement n et p .

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_p\}$ une base de F .

Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire, on représente l'action de L par une matrice en utilisant les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' . Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe des réels (uniques) a_{1j}, \dots, a_{pj} tels que $L(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} f_i$.

Ainsi pour $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in E$ on aura $L(x) = L(\sum_{j=1}^n x_j e_j) = \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j (\sum_{i=1}^p a_{ij} f_i) = \sum_{i=1}^p (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) f_i$.

On pose $[L]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} := [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. La matrice $[L]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est la **matrice représentative de l'application linéaire L dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}'** .

Réciproquement, si $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ est une matrice à p -lignes et n -colonnes, l'application $E \rightarrow F$ qui à $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in E$ associe

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \sum_{i=1}^p (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) f_i \in F, \text{ est linéaire.}$$

Le théorème suivant résume les propriétés les plus importantes des représentations matricielles des applications linéaires.

1.7.1 THÉORÈME

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectivement n et p . et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_p\}$ des bases (fixées) de E et F respectivement.

1. L'application $\begin{matrix} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ L & \mapsto & [L]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \end{matrix}$ est un isomorphisme i.e. c'est une application linéaire, bijective ainsi que son application inverse.
2. Soit G est un autre espace vectoriel de dimension m et \mathcal{B}'' une base de G . Alors pour $L \in \mathcal{L}(E, F)$ et $H \in \mathcal{L}(F, G)$, la matrice représentative de la composée $H \circ L$ est le produit des matrices représentatives de H et L , on a :

$$[H \circ L]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''} = [H]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''} \cdot [L]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$$

1.7.2 REMARQUE

L'espace vectoriel des matrices $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ est de dimension finie $p.n$ (identifié à \mathbb{R}^{pn}), donc $\mathcal{L}(E, F)$ est de même dimension.

D'autre part comme la dimension est finie, toutes les normes définies sur cet espace sont équivalentes.

On peut par exemple munir $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ de la norme : $\|A\| = \sup_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}|$.

Finalement, si on munit $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ de normes, l'isomorphisme algébrique décrit en 1. est en fait bicontinu (i.e. continu ainsi que son inverse).

On aura besoin dans la suite d'étudier la continuité d'applications à valeurs dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, F)$, mais d'après le théorème précédent, on peut considérer que ces applications sont matricielles, et comme le montre le corollaire suivant il suffit de montrer que les coefficients de la matrice représentative sont des fonctions continues.

1.7.3 COROLLAIRE

Soient E et F des espaces vectoriels normés de dimensions finie n et p respectivement et U un ouvert de E .

Soit une application $\phi : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ on note $[a_{ij}(x)]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice représentative de $\phi(x)$.

Alors, ϕ est continue si et seulement si les fonctions $a_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, pour tout $1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n$.

1.7.1 Matrice Jacobienne

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectivement n et p .

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' des bases E et F respectivement.

Soit U un ouvert de E et $f : U \rightarrow F$
 $x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ une application différentiable en $a \in U$. Comme $Df(a) : E \rightarrow F$ est une application linéaire, elle admet une unique matrice $p \times n$, qui la représente dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' , qu'on notera par $J_f(a)$.

Soit $h = (h_1, \dots, h_n) \in E$ un vecteur représenté dans la base \mathcal{B} , par définition de $J_f(a)$ on a $Df(a).h = J_f(a).h$.

$$\text{Comme } f = (f_1, \dots, f_p), \text{ alors } Df(a) = \begin{pmatrix} Df_1(a) \\ \vdots \\ Df_p(a) \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'où } Df(a)h = \begin{pmatrix} Df_1(a)h \\ \vdots \\ Df_p(a)h \end{pmatrix} = J_f(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}. \text{ Ainsi le } j\text{-ème vecteur colonne}$$

$$\text{de } J_f(a) \text{ est le vecteur } \begin{pmatrix} Df_1(a)e_j \\ \vdots \\ Df_p(a)e_j \end{pmatrix}, \text{ d'autre part } Df_i(a).e_j = D_{e_j}f_i(a) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a).$$

Ainsi, l'élément de $J_f(a)$ qui se trouve sur la j -ème ligne et la i -ème colonne est $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ la dérivée partielle de f_i au point a .

Donc la matrice représentative de la différentielle de f en a est la matrice

$$J_f(a) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$$

1.7.4 DÉFINITION

La matrice $J_f(a)$ est appelée **la matrice Jacobienne** de f en a .

1.7.5 REMARQUE

i) Si $n = p$ Le déterminant de la matrice Jacobienne en a est appelé **déterminant Jacobien** (ou Jacobien) de f en a sera noté $|J_f|(a)$ ou $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a)$.

ii)

$$J_f(a) := Df(a) = (D_j f_i(a))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \dots & D_n f_1(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_1 f_p(a) & \dots & D_n f_p(a) \end{pmatrix}.$$

1.7.6 EXEMPLE. Si $E = F = \mathbb{R}$, la matrice représentative de $Df(a)$ est le nombre dérivé $f'(a) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

1.7.7 EXEMPLE. $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}$.

La différentielle $Df(a)$ est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et sa matrice représentative dans la base canonique est éléments de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est une matrice ligne.

On sait, que pour tout $h = \sum_{j=1}^n h_j e_j = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$,

$$Df(a).h = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, la représentation matricielle de $Df(a)$ est

$$[Df(a)] = (D_1 f(a), \dots, D_n f(a)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

Dans ce cas, le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$ est appelé **le gradient de f en a** et est noté

$\nabla f(a)$ et satisfait la relation suivante : pour tout $h \in \mathbb{R}^n$:

$$Df(a).h = \langle \nabla f(a), h \rangle = \langle h, \nabla f(a) \rangle = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

1.7.8 COROLLAIRE (RÈGLE DE COMPOSITION ET MATRICES JACOBIENNES)

On suppose $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ et $G = \mathbb{R}^p$. Soient $f = (f_1, \dots, f_m)$

et $g = (g_1, \dots, g_p)$ deux applications comme dans le théorème précédent. Alors :

- 1) $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a)$
 2) En termes de coefficients des matrices jacobiennes correspondantes :

i) on a pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ (puisque $(g \circ f)_i = g_i \circ f$) :

$$D_j((g \circ f)_i) = D_j((g_i \circ f)) = \sum_{k=1}^m ((D_k g_i) \circ f) D_j f_k$$

ii) Si on note par $x = (x_1 \dots, x_n)$ la variable dans \mathbb{R}^n et $y = (y_1 \dots, y_m)$ celle dans \mathbb{R}^m , on obtient pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$:

$$\boxed{\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)}$$

ou encore

$$J_{g \circ f}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(a)) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(a)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(f(a)) & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}(f(a)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

1.7.9 EXEMPLE. 1. Changement de variables en coordonnées polaires :

Soit $f(x, y)$ une fonctions différentiable, on pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ et on considère l'application

$$\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Alors les dérivées partielles de la composée $h(r, \theta) = f \circ \phi(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ sont données par :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial r}(r, \theta) \\ \frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta}(r, \theta) \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \sin \theta \\ \frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) = -\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r \cos \theta \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial r} & \frac{\partial h}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

2. Exercice : Déterminer les dérivées partielles dans le cas du changement de variables en coordonnées sphériques :

$$x = r \cos \theta \sin \psi, y = r \sin \theta \sin \psi, z = r \cos \psi$$

$$\text{et } h(r, \theta, \psi) = f(r \cos \theta \sin \psi, r \sin \theta \sin \psi, r \cos \psi).$$

1.7.10 DÉFINITION

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application. On dit que f est de **classe C^1** (ou **continûment différentiable**) sur U si elle est différentiable en tout point de U et si l'application $:Df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, $a \mapsto Df(a)$ est continue.

Le résultat suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application soit de classe C^1 .

1.7.11 THÉORÈME

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

Alors f est de classe C^1 si et seulement si ses dérivées partielles sont continues i.e. pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est une fonction continue.

Démonstration: " \implies " Soit $a \in U$. Si f est de classe C^1 , alors $\lim_{x \rightarrow a} Df(x) - Df(a) = 0$, ainsi $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = Df(x)e_j - Df(a)e_j = (Df(x) - Df(a))e_j = 0.e_j = 0$, d'où la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ en a .

" \impliedby " Si toutes les dérivées partielles sont continues en a alors, d'après le corollaire 1.4.4, f est différentiable et $Df(x).h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)h_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\pi_j(h)$, où $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est la projection $\pi_j(h) = h_j$.

Ainsi $Df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \pi_j$ est une somme finie d'applications continues, est donc continue, c-à-d que f est C^1 . ■

1.7.13 REMARQUE

On a évidemment, que f de classe C^1 entraîne que f est différentiable. La réciproque est en générale fautive voir exercice 1.4.7 ou 1.4.8.

1.7.14 REMARQUE (REMARQUE SUR LES NOTATIONS)

On note souvent les dérivées partielles par $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) := D_j f(a)$ et $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) := D_j f_i(a)$.

Le problème avec cette notation est qu'on doit désigner la variable dans \mathbb{R}^n ; x dans ce cas. Ce qui parfois engendre des relations "étranges" qui requièrent une interprétation assez délicate.

Par exemple, on considère \mathbb{R}^2 muni de la base $e'_1 = e_1 + e_2$ et $e'_2 = e_2$.

Alors, $x_1 e_1 + x_2 e_2 = y_1 e'_1 + y_2 e'_2$, ceci nous donne $(x_1, x_2) = (y_1, y_1 + y_2)$. Alors

$$x_1 = y_1 \quad \text{mais,} \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = D_{e_1} \neq D_{e'_1} = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

$$x_2 \neq y_2 \quad \text{mais,} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = D_{e_2} = D_{e'_2} = \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Donc $\frac{\partial}{\partial y_j}$ dépend des autres variables $y_k, k \neq j$.

De même, $\frac{\partial y_2}{\partial y_1}$ est égal à 0 si l'on considère y_1 et y_2 indépendants ou -1 si l'on utilise $(y_1, y_2) = (x_1, x_2 - x_1)$.